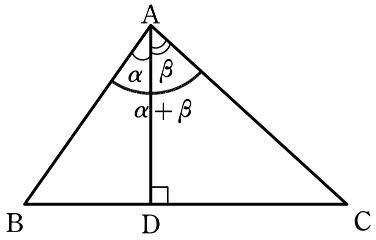
高校２年生の数学Ⅱの授業から～

数学の本質的な理解をめざして…

　ある日の授業の一コマです。テーマは「三角関数の加法定理」
教科担当(筆者)は次のような説明をしました。



右の図で $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積は

$\boldsymbol{\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot \sin(\alpha+\beta)}$ …①

で求められます。

また，$\triangle \mathrm{ABD}$ の面積は $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AD}\cdot \sin\alpha$ であり，

$\triangle \mathrm{ACD}$ に注目すると，$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}}=\cos\beta$ ですから $\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\cos\beta$ となり

$\triangle \mathrm{ABD}$ の面積は $\boldsymbol{\triangle \mathrm{ABD}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot \cos\beta\cdot \sin\alpha}$ …② と計算されます。

同様に，$\triangle \mathrm{ACD}$ の面積は $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AC}\cdot \mathrm{AD}\cdot \sin\beta$ であり，

$\triangle \mathrm{ABD}$ に注目すると $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}=\cos\alpha$ ですから $\mathrm{AD}=\mathrm{AB}\cos\alpha$ なので

$\triangle \mathrm{ACD}$ の面積は $\boldsymbol{\triangle \mathrm{ACD}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AC}\cdot \mathrm{AB}\cdot \cos\alpha\cdot \sin\beta}$ …③ と計算されます。

①，②，③の結果と，$\triangle \mathrm{ABC}=\triangle \mathrm{ABD}+\triangle \mathrm{ACD}$ であることから

$\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot \sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot \sin\alpha\cdot \cos\beta+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot \cos\alpha\cdot \sin\beta$ が得られます。

この両辺を $\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}$ で割ると $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$ であることがわかります。

これを 三角関数の加法定理といいます。

　この説明は，三角形の面積というとてもなじみ深いものからの加法定理へのアプローチで，学習者にとっても受け入れやすい論理展開であると思います。しかし、教科書にはこの説明についての記述がありません。

　そこで，次のように問いかけました。

「この説明が教科書に加法定理の証明として紹介されていないのはどうして？」

　クラスのメンバーはしばらくきょとんとしていましたが、ある生徒がポツリ一言

「角が大きいときには，この説明は成り立たないから」とつぶやきました。

　実のところ，私はこの答えが出てくることを期待していなかったので，嬉しくなって「そうやねん！」と大きな声を出してしまいました。

上の説明では α, β が鋭角であるときしか説明がつきません。大きい角では図のような三角形が描けないからです。このような説明では，加法定理のイメージをつかむことはできても一般的な角で成り立つことの証明とはいえないのです。教科書で上の説明を「証明」として採用していないのはこのためです。

数学の学習では，新しい概念を学ぶときに「イメージ」をもてることはとても大切です。そういう意味で最初のような説明でアプローチを試みることは意義があると考えています。が、「イメージ」だけをもってそれでわかったと考えてしまうことは，深い理解にはつながりません。

「こっちの説明の方がわかりやすいのに，なんでこんなめんどくさい説明になってんねん！」と感じたときには，この説明でなければならない理由を考えてみてください。そのような姿勢を失わず，考え続けることが数学の本質的な理解へとつながるのではないかと考えています。